水研センター研報，第２号，25－34，平成14年
Bull. Fish. Res. Agen., No.2, 25－34, 2002

枠どり法と Petersen 法の区間推定における伝統的統計学とベイズ統計学との比較

赤嶺　達郎*

Comparison between Conventional and Bayesian Statistics in Interval Estimation for Quadrat Method and Petersen Method

Tatsuro AKAMINE*

Abstract The quadrat method and the Petersen method are basic techniques for the investigation of stock size. The binomial distribution or the hypergeometric distribution is used for these methods in statistics. The comparison between the conventional and Bayesian statistics for these models makes it easy to understand the meaning of the confidence interval. Several numerical examples show that the approximation to the normal distribution corrected by half integer is the most useful method for these models. The classical Bayesian method in which a uniform distribution is used for prior distribution of n or p is most adequate, because its confidence interval is proven to be almost equal to that of the conventional statistics.

Key word: Bayesian, binomial distribution, hypergeometric distribution, interval estimation, Petersen method, quadrat method

枠どり法と Petersen 法は個体数推定における基本的手法である。これらは二項分布と超幾何分布で確率モデル化でき，区間推定についても多くの研究が行われてきた。しかしながら多くの手法が提示されているにもかかわらず，実用的には精度の面で不十分なものが多く，理論的な検討も不十分であった。ここでは伝統的統計学とベイズ統計学の比較という立場で，数値例を用いて区間推定手法について比較検討する。このような単純なモデルについて比較することによって，両者の立場の違いが鮮明になるからである。同時に枠どり法と Petersen 法における最適な区間推定方法も提示する。

伝統的統計学とベイズ統計学では信頼区間の考え方がまったく異なり，同じ土俵の上で比較することはほとんど不可能である。ベイズ統計学に関して赤池（1989）は「事前分布の選択は決して容易なものではない。それどころか，この問題をめぐる“哲学的な”議論は多数の人々を巻き込み，結局なんらの決定的な解決をも見なかった」として，「ベイズ的方法の有効性は，なんらかの公理によって保証されるものではなく，現実の問題に対して著しい有効性を示すような適用事例の集積を通じてはじめて，広く一般に受け入れられるようになる」と述べている。同様に Seber（1992）も多くのベイズ的方法を紹介した上で，伝統的方法と比較してその有効性を検討する必要があると述べている。しかしながら1990年代からベイズ統計学では，事前分布の不確実性を考慮に入れた「階層モデル」か，事前分布をデータから推定する「経験ベイズ」が主流となっていて，これらに関する議論はすべてベイズ統計学の枠内で終始している。この小論のように実際の数値例について両者を比較検討したものは，ほとんど見受けられない。なお竹内（1989）は「Non-Bayesian の立場からベイズ的方法を考えるとき，２つの方向が考えられる。１つは Non-Bayes 的枠組みの中でベイズ法を用いることによって積極的な結果を得ることであり，もう１つは Non-Bayesian の観点からベイズ法を検討することである」と述べている。この小論における方向は後者であるが，前者の方向も含んでいる。

2001年９月26日受理（Accepted on September 26, 2001）
水産総合研究センター業績 A 第９号（Contribution No.A 9 from Fisheries Research Agency）
* 中央水産研究所　〒236-8648　神奈川県横浜市金沢区福浦2-12-4（National Research Institute of Fisheries Science, Fukuura, Kanazawa, Yokohama 236-8648, Japan）

確率モデルと区間推定方法

枠どり法（quadrat 法）はベントス調査などにおける基本的手法で，抽出率 p で採集して r 尾採れた場合に，全体の尾数 n を推定する方法である。対象生物がランダム分布している場合には r は二項分布に従う。Petersen 法は標識再捕の基本的手法で，全体で N 尾いるうちの M 尾に標識をつけ，n 尾再捕したうちの r 尾に標識があった場合に N を推定する方法である。ランダム分布が仮定できる場合には r は超幾何分布に従うが，二項分布で近似できる。

最初に確率分布を定義する。二項分布は

$$\mathrm{Bi}(r,\,n,\,p)=\binom{n}{r}p^{r}(1-p)^{n-r} \tag{1}$$

と定義される。ここで

$$\binom{n}{r}=\frac{n^{(r)}}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{2}$$

である。確率変数は r であるが，枠どり法では母数 n を推定する。一方，Petersen 法では標識率である母数 p を推定し，これから $N=M/p$ を推定する。超幾何分布は

$$\mathrm{HG}(r,\,n,\,M,\,N)=\frac{\binom{M}{r}\binom{N-M}{n-r}}{\binom{N}{n}}=\binom{n}{r}\frac{M^{(r)}(N-M)^{(n-r)}}{N^{(n)}} \tag{3}$$

と定義され，N と M が n と r と比較してはるかに大きな場合には二項分布で近似できる。確率変数は r であるが，Petersen 法では母数 N を推定する。なお超幾何分布では M と n は交換可能なので，

$$\mathrm{HG}(r,\,n,\,M,\,N)=\mathrm{HG}(r,\,M,\,n,\,N) \tag{4}$$

が成立する。

伝統的統計学はネイマン・ピアソン流の帰無仮説に基づく方法で，母数の分布は一切考慮せず，確率変数の分布だけを用いるため，頻度論者（frequentist）と呼ぶこともある。これに対してベイズ統計学は母数の分布を積極的に用いる方法で，「ベイズの定理」だけを使用する。歴史的にはベイズ統計学が最初に用いられ，それを否定していく過程で伝統的統計学が確立されていった。しかしベイズ統計学は生き残り，近年では意志決定などの分野で復活してきており，発展と普及が著しい（松原，2000)。

この論文で比較する方法を以下に列記する。

(a) 伝統的統計学において確率変数の HDR（最高確率密度領域，Highest Density Region）を用いて母数の信頼区間を求める方法。

HDR は領域内における任意の点の確率が領域外における任意の点の確率よりも高い領域で，区間の長さは最小となる。区間推定で用いる最良の区間であるが，計算が面倒なため従来はほとんど用いられなかった。しかし最近は表集計ソフトの組込み関数で簡単に確率分布の値が求められるので（岩崎，2000)，HDR を求めることが可能となってきている。

伝統的統計学で母数 θ の信頼区間を求める場合には，帰無仮説：

$$H_o:\theta=\theta_o \tag{5}$$

を立てる。このとき θ_o の下での確率変数 x の95%区間をHDR で求めることができる。θ_o にいろいろな値を入れて，この区間内に実際のデータが含まれている場合には，θ_o を θ の95%信頼区間内に含め，そうでない場合には含めない。これで母数 θ の信頼区間が求まる。実際に離散モデルで HDR をいちいち求めるのは面倒なので，以下のようにする方が効率的である。

確率変数 x の確率を $\mathrm{Pr}(x)$ とする。この確率分布において確率 $\mathrm{Pr}(a)$ 以上の部分の総確率を以下のように定義する。

$$S(\mathrm{Pr}(a))=\sum\mathrm{Pr}(x)\delta(x,a) \tag{6}$$

$$\delta(x,a)=\begin{cases}1 & \mathrm{Pr}(x)\geqq\mathrm{Pr}(a)\\ 0 & \mathrm{Pr}(x)<\mathrm{Pr}(a)\end{cases}$$

ここで $\sum$ はすべての x についての総和（連続モデルの場合には積分）を意味している。これより $S(0)=1$ は自明である。HDR は集合の表現を用いると，95%の場合には，

$$\mathrm{HDR}(0.95)=\{a\mid S(\mathrm{Pr}(a))\leqq0.95\} \tag{7}$$

と表すことができる。これより点 a が95%区間に含まれるかどうかの判定方法は以下のようになる。

$S(\mathrm{Pr}(a))\leqq0.95$ ならば，点 a は95%区間に含まれる。
$S(\mathrm{Pr}(a))>0.95$ ならば，点 a は95%区間に含まれない。

通常は HDR ではなく片側 $\alpha/2$ 点を求めることが多

い。便宜的方法であるが，実用的な手法である。左右対称分布の場合には HDR と一致する。二項分布の p の推定などで「正確（exact）法」と呼ばれている方法は，この片側 $\alpha/2$ 点を正確に求める方法なので，区間推定手法としては HDR よりも劣ることに注意する必要がある。なお，この方法は積分ではリーマン積分に対応し，HDR はルベーグ積分（小寺，1995）に対応している。

この方法は計算が面倒であるが，理論的には何の問題もない。したがって以降の比較では，この方法の値にどれだけ近いかで精度の優劣を判定することにする。最初に言明したように，これはあくまでも Non-Bayesian の立場である。

(b) 正規分布に近似して「半整数補正」を行う方法。

二項分布は p を固定して $n\to\infty$ としたとき，正規分布に近づく（ド・モアブルーラプラスの定理）。伝統的統計学においては，正規分布に近似できる場合には母数 n や p の区間推定は２次方程式に還元できるので，簡単に解くことができる。具体的に示すと二項分布の平均は np，分散は $np(1-p)$ なので，

$$z=\frac{r-np}{\sqrt{np(1-p)}} \tag{8}$$

とおくと，上記の定理より z の分布は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に近づく。(8)式より

$$z^2np(1-p)=(r-np)^2 \tag{9}$$

という２次式が得られる。この式は (r,n) 平面では放物線，(r,p) 平面では楕円となるので，(r,n,p) 空間で「楕円放物面」を形成している。なお $p\to 0$，$n\to\infty$ かつ $np\to\lambda$ の場合には，二項分布はポアソン分布に近づく。二項分布の計算は大変なので，正規分布やポアソン分布が考案されたのである。ポアソン分布は左右不対称なので正規分布よりも扱いにくい。

実際に区間推定を行う際には，「半整数補正」を行うのがよい。これは離散分布（二項分布）における点 a の確率は，連続分布（正規分布）では区間「$a-0.5$〜$a+0.5$」における確率に相当することによる補正である。これより枠どり法における n の区間推定の式は，

$$n=\frac{1}{p}\left\{r\pm 0.5+\frac{z^2}{2}(1-p)\mp z\sqrt{(r\pm 0.5)(1-p)+\frac{z^2}{4}(1-p)^2}\right\} \tag{10}$$

となる（復号逆順に注意）。同様に Petersen 法における p の区間推定の式は，

$$p=\frac{1}{n+z^2}\left\{r\pm 0.5+\frac{z^2}{2}\mp z\sqrt{(r\pm 0.5)\left(1-\frac{r\pm 0.5}{n}\right)+\frac{z^2}{4}}\right\} \tag{11}$$

となる（復号逆順に注意）。(11)式は竹内，藤野（1981）にも紹介されているが，z の前の符号を誤っているので注意する必要がある。両式で $z=1.96$ とすれば95%信頼区間が求まる。

(c) ベイズ統計手法として事前分布に一様分布を仮定する古典的方法。

ベイズ統計学は「逆確率の方法」とも呼ばれ，「ベイズの定理」を積極的に用いる古典的な方法である。ベイズの定理は数学的には条件付き確率におけるほとんど自明な定理で，

$$\Pr(\theta\mid x)=\Pr(\theta)\Pr(x\mid\theta)/\Pr(x) \tag{12}$$

と表される。ここで $\Pr(A\mid B)$ は事象 B の下の事象 A の条件付き確率を意味している。ベイズ統計学ではこの定理を以下のように書き直して用いる。

$$\begin{gathered}\mathrm{Ppost}(\theta)=\mathrm{Pprior}(\theta)L(\theta\mid x)/S,\\ S=\sum\mathrm{Pprior}(\theta)L(\theta\mid x)\end{gathered} \tag{13}$$

ここで左辺の $\mathrm{Ppost}(\theta)$ は $\mathrm{Ppost}(\theta\mid x)$ を略記したものである。(12)式の $\Pr(x\mid\theta)$ はデータ発生確率で，この論文の例では二項分布や超幾何分布などであるが，データ x を固定して考えた場合には(13)式のように母数 θ の関数 $L(\theta\mid x)$ となるため「尤度（関数）」と呼ばれる。この式より母数 θ の事前確率が $\mathrm{Pprior}(\theta)$ として与えられたとき，事後確率を $\mathrm{Ppost}(\theta)$ として得ることができる。なお Σ は母数 θ のとりうるすべての範囲にわたる総和（連続モデルの場合には積分）である。S は事後確率の総和を１とするための規格化の定数にすぎないので，この定理の本質的な部分は

$$\mathrm{Ppost}(\theta)\propto\mathrm{Pprior}(\theta)L(\theta\mid x) \tag{14}$$

と表すことができる。つまり「事後確率は事前確率と尤度（データ発生確率）の積に比例する」ことを意味している。

ベイズの定理は数学的に正しい定理であるが，通常の統計学的問題では事前分布が明らかでないことが多い。そのため事前分布の作り方にさまざまな手法が提言されていて，ベイズ統計学には多くの手法が存在す

る。昔は「根拠薄弱のために，いくつかの相互に排反な事象に，等確率を与える」という「理由不十分の原理」（繁桝，1985）を適用することが多かったので，この論文では一様分布を事前分布とする手法を「古典的手法」と呼ぶことにする。

枠どり法で n の区間推定をベイズ統計で行う場合に，n の事前分布として一様分布を採用したのは Mangel and Beder（1985）が最初である。このとき n の事後分布において，

$$\sum_{n=r}^{\infty} \mathrm{Bi}(r,\ n,\ p) = \frac{1}{p} \tag{15}$$

が成立する。しかし Mangel and Beder（1985）および Hilborn and Mangel（1997）では区間推定において，点推定値から上下に等距離となる区間を用いており，一般的でない。Akamine（1989a）は同一モデルにおいて HDR で区間推定を行い，さらに

$$\sum_{i=r}^{n} \mathrm{Bi}(i,\ n,\ p) = p\sum_{j=r}^{n} \mathrm{Bi}(r-1,\ j-1,\ p) \tag{16}$$

を導いている。この式は r の上側確率と n の事後分布の下側確率が完全に一致することを意味している。したがって伝統的統計学とベイズ統計学の古典的手法とで n の区間推定を片側 $\alpha/2$ 点で行った場合には，両者の解はほとんど一致する。ただし両者とも HDR で行った場合には若干の差が生じる。

Petersen 法で二項分布の p の区間推定を行う場合にも，事前分布として一様分布を仮定することが多い。実はこれはベイズ自身が行った方法である（Bayes, 1763）。現在，ベイズの定理と呼ばれている⑿式は，ラプラスがこれを一般化したものである。このとき p の事後分布において，

$$\int_0^1 \mathrm{Bi}(r,\ n,\ p)\mathrm{d}p = \frac{1}{n+1} \tag{17}$$

が成立する。さらに，

$$(n+1)\int_0^p \mathrm{Bi}(r,\ n,\ t)\mathrm{d}t = p\,\mathrm{Bi}(r,\ n,\ p) + \sum_{i=r+1}^{n} \mathrm{Bi}(i,\ n,\ p) \tag{18}$$

が成立するが，この式は r の上側確率と p の事後分布の下側確率がほぼ一致することを意味している。したがって伝統的統計学とベイズ統計学の古典的手法とで p の区間推定を片側 $\alpha/2$ 点で行った場合には，両者の解はほとんど一致する。フィッシャーはベイズ統計を徹底的に攻撃したが，1922年の論文で「もし逆確率の中にはエラー以外何ものもなかったとしたならば，その逆確率は決してラプラスやポアッソンの心を奪わなかったはずだという疑問が残る」という感想を漏らしている（蓑谷，1997）。この疑問に対する回答のひとつとして，上記のように二項分布の母数 n または p の推定問題においては，母数の事前分布を一様分布と仮定した古典的なベイズ統計学が，伝統的統計学とほとんど同一の解を与えるという事実を挙げることができる。しかしこのように事前分布として一様分布が適切な場合は決して多くない。後述のように，超幾何分布において母数 N の事前分布として一様分布を仮定することは不適切である。

⒟　ベイズ統計手法として事前分布に一様分布以外の分布を使用する方法。

二項分布の p の事前分布として，

$$\mathrm{Pprior}(p) \propto \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \tag{19}$$

がよく用いられている（渡部，1999）。これはフィッシャー情報量の平方根に比例するもので，ジェフリーズの基準の一種である。他によく用いられる事前分布は，

$$\mathrm{Pprior}(p) \propto \frac{1}{p(1-p)} \tag{20}$$

である。これは二項分布の共役分布となるベータ分布において，⒀式の S を最大にするもので，「経験ベイズ」の考え方に従ったものである。この小論では一様分布とこの2つの事前分布について比較検討する。

次に Petersen 法について超幾何分布で厳密に検討してみる。二項分布と同様に $p = M/N$ が一様分布となればよい。M が未知で N が既知の場合には，M の事前分布を一様分布とすればよいので簡単である（鈴木，1987）。この場合には M の事後分布において，

$$\sum_{M=r}^{N-n+r} \frac{n+1}{N+1} \mathrm{HG}(r,\ n,\ M,\ N) = 1 \tag{21}$$

が成立し，さらに，

$$\sum_{k=r}^{M} \frac{n+1}{N+1} \mathrm{HG}(r,\ n,\ k,\ N) = \frac{M+1}{N+1} \mathrm{HG}(r,\ n,\ M,\ N) + \sum_{i=r+1}^{n} \mathrm{HG}(i,\ n,\ M+1,\ N+1) \tag{22}$$

が成立する。この式は r の上側確率と M の事後分布の下側確率がほぼ一致することを意味している。

しかしながら Petersen 法では M が既知で N が未

知である。Akamine（1989b）は N の事前分布として，

$$\mathrm{Pprior}(N)=\frac{M+1}{(N+2)(N+1)} \tag{23}$$

を提示した。このとき N の事後分布において，

$$\sum_{N=M+n-r}^{\infty}\frac{(n+1)(M+1)}{(N+2)(N+1)}\mathrm{HG}(r,\,n,\,M,\,N)=1 \tag{24}$$

が成立し，さらに(22)式と同様に，

$$\sum_{h=N}^{\infty}\frac{(n+1)(M+1)}{(h+2)(h+1)}\mathrm{HG}(r,\,n,\,M,\,h)$$
$$=\frac{M+1}{N+1}\mathrm{HG}(r,\,n\,M,\,N)+\sum_{i=r+1}^{n}\mathrm{HG}(i,\,n,\,M+1,\,N+1) \tag{25}$$

が成立する。この式は r の上側確率と N の事後分布の上側確率がほぼ一致することを意味している。これらの数式の簡単な証明は付録に示した。

ここで p は連続分布であるが，Nは離散分布であることに注意する必要がある。Nの事後分布において確率は $(n+1)\mathrm{Pprior}(N)\mathrm{HG}(r,\,n,\,M,\,N)$ であるが，これを N の離散分布（棒グラフ）とみなした場合には p と整合性の高い信頼区間を得ることはできない。p の事後分布における高さ（確率密度）は $\mathrm{HG}(r,\,n,\,M,\,N)$ と一致し，$\mathrm{Pprior}(N)\mathrm{HG}(r,\,n,\,M,\,N)$と一致するのは面積（確率）だからである。したがって N の連続分布（ヒストグラム）とみなして，$\mathrm{HG}(r,\,n,\,M,\,N)$ の値をヒストグラムの高さ（確率密度）に，$\mathrm{Pprior}(N)$ の値をヒストグラムの横幅に，$(n+1)$ を規格化の定数に解釈する必要がある。これより区間推定を行う際には，事後確率の値の大きい項から採用するのではなく，「確率密度 $\mathrm{HG}(r,\,n,\,M,\,N)$ の大きい項から採用」していって，事後確率の総和が95%になった段階で打ち切れば，HDRとしての95%信頼区間が求まる。こうすることによって二項分布の場合と整合性の高い信頼区間を得ることができる。通常のベイズ統計学における事後分布の扱い方と異なるため，ここではこのAkamine（1989b）の方法を便宜上「修正HDR法」と呼ぶことにする。

数　値　実　験

ここでは数値例を用いて上記の信頼区間推定方法を比較検討してみる。

〔例１〕枠どり法で $p=0.2$，$r=20$ のとき，n の95%信頼区間を求める。これは Akamine（1989a）の例である。

(a) 伝統的統計学でHDRを用いて信頼区間を求めると，$n=70$〜144, 147。この場合に信頼区間は不連続となる。

(b) 半整数補正した正規分布近似(10)では，$n=70$〜145。

(c) nの事前分布を一様分布としてnのHDRを求めると，$n=66$〜144。

以上を比較すると，実用的には正規分布近似で十分であるが，nの事前分布を一様分布とするベイズ統計手法も悪くない。(a)では信頼区間が不連続となっているが，後述のように p の区間推定においても同様の現象が認められる。離散分布では連続分布と違って，$S(\mathrm{Pr}(a))$ の値が95%のような特定の値と通常は一致しないためである。伝統的統計学でHDRを用いた場合は，信頼区間が連続になるとは限らないので注意が必要である。

〔例２〕Petersen 法（二項分布）で $n=100$，$r=20$ のとき，p の95%信頼区間を求める。これは Akamine（1989b）の例である。

(a) 伝統的統計学でHDRを用いて信頼区間を0.001きざみで求めると，$p=0.135$〜0.284。

(b) 半整数補正した正規分布近似(11)では，$p=0.137$〜0.283。

(c) p の事前分布を一様分布として 0.005 きざみでHDRを求めると，$p=0.135$〜0.285。なお事後確率のモードは $p=0.200$。

(d-1) pの事前分布を(19)式として0.005きざみでHDRを求めると，$p=0.130$〜0.280。なお事後確率のモードは $p=0.195$。

(d-2) p の事前分布を(20)式として 0.005 きざみでHDRを求めると，$p=0.125$〜0.275。なお事後確率のモードは $p=0.195$。

このような素直なデータに関しては結果にほとんど差がないが，(d)の２法は p の小さい方にずれていて，この傾向は次の例３でさらに顕著になる。

〔例３〕Petersen 法（二項分布）で $n=100$，$r=1$ のとき，p の95%信頼区間を求める。

(a) 伝統的統計学でHDRを用いて信頼区間を0.001きざみで求めると，$p=0.004$〜0.049。ただし 0.0001 きざみで求めると，「$p=0.0453$〜0.0459 は区間外」となる。つまり信頼区間は不連続となっている。この理由は例１の(a)と同様である。

(b) 半整数補正した正規分布近似(11)では，$p=0.0035$〜0.046。

(c) p の事前分布を一様分布として 0.001 きざみでHDRを求めると，$p=0.001$〜0.046。なお事後確率

のモードは $p=0.01$。

(d-1) p の事前分布を⒆式として 0.001 きざみで HDRを求めると，$p=0.001$〜0.038。なお事後確率のモードは $p=0.005$。

(d-2) pの事前分布を⒇式として0.001きざみでHDRを求めると，$p=0.000$〜0.029。なお事後確率のモードは$p=0.000$。

このような極端なデータに関しては結果にかなりの差がでる。実用的には正規分布近似で十分である。ここで⒜について補足説明を行う。$p=0.003$ の場合には，r について $S(\Pr(0))=0.74$，$S(\Pr(1))=0.96$ となるので，$r=1$ は96%区間には含まれるが，95%区間には含まれない。さらに$p=0.0005$の場合には，rについて $S(\Pr(0))=0.951$ となるから，95.1%の HDR は存在するが，95%の HDR は存在しない。これらは奇妙な印象を与えるかもしれないが，前述のように離散分布では連続分布と違って，$S(\Pr(a))$ の値が95%のような特定の値と通常は一致しないことに起因している。

ベイズ統計手法では⒞の一様分布が最適であるが，下限の精度がやや悪い。これは p が小さい部分では正規分布ではなくてポアソン分布に近いため，r のHDRの棄却域が両側の $\alpha/2$ 点ではなくて上側 α 点に近くなるためである。⒟の２法については⒜の値と大きく異なるが，これは事前分布において $p=0$ 近辺の重みが大きいためである（同様に $p=1$ 近辺の重みも大きい）。標識再捕法では標識率 p の値が大きいほど推定精度が高くなるから，できるだけ多く標識するように推奨されている。したがって $p=0$ 近辺の重みが大きい事前分布を積極的に用いる必要性はないと思われる。とりわけ(d-2)では事後分布のモードは $p=0$ で，もし本当に $p=0$ であるなら $r=1$ となるはずがないから，事後分布としては受け入れ難い。

〔例４〕Petersen 法（超幾何分布）で$M=50$，$n=35$，$r=25$のとき，N の95%信頼区間を求める。これは Manly（1997）の例である。

⒜ 伝統的統計学で HDR を用いて信頼区間を求めると，$N=62$〜83。

⒝ 半整数補正した正規分布近似⑾で p を求めてNに変換すると，$N=61$〜88。

⒞ N の事前分布を一様分布（$N=60$〜150）として HDR を求めると，$N=62$〜84。

⒟ 修正 HDR 法で N のHDRを求めると，$N=63$〜84。

このデータに関してはほとんど差が出ない。標識率 p の点推定値は $5/7=0.71$ であるが，このような高い標識率であれば，どのような方法でも区間推定の精度は高くなる。標識再捕法としては非現実的な数値なので，次にもう少し現実的な数値で検討してみる。

〔例５〕Petersen 法（超幾何分布）で$M=20$，$n=10$，$r=2$ のとき，N の95%信頼区間を求める。これも Akamine（1989b）の例である。

⒜ 伝統的統計学で HDR を用いて信頼区間を求めると，$N=45$〜222。

⒝ 半整数補正した正規分布近似⑾で p を求めてNに変換すると，$N=44$〜247。

⒞ Nの事前分布を一様分布として HDR を求めると，N の上限の設定によってどのような値もとり得るので，推定不能である。たとえば N の事前分布を $N=28$〜500 の一様分布と仮定すると，HDR は $N=45$〜443となるが，$N=28$ 〜1000 の一様分布と仮定すると，HDR は$N=40$〜778となる。

⒟ 修正HDR法でNのHDRを求めると，$N=45$〜435。

実用的には正規分布近似で十分である。⒟では N の上限の値が大きく異なっている。これは N の下限では正規分布に近いのでrの棄却域は下側 $\alpha/2$ 点であるのに対し，N の上限ではポアソン分布に近くて r の棄却域が上側 α 点となっているためである。⒟においてNの下側 $\alpha/2$ 点は$N=43$，上側 α 点は $N=257$となっている。したがって信頼区間を HDR ではなく「Nの下側 $\alpha/2$ 点〜上側 α 点」に修正すれば精度は高くなるが，これはもはやベイズ統計手法とは言えない。なお正規分布近似においても事情は同じであるが，近似精度が悪くて $\alpha/2$ %のはずが実際は α%に近くなっているため，かえって信頼区間の精度が高くなっている。これらについて確認するため $p=0.5$ とした次の例を示す。なお⒞については実用的でないことが既に示されたので省略した。

〔例６〕Petersen 法（超幾何分布）で$M=50$，$n=10$，$r=5$のとき，N の95%信頼区間を求める。

⒜ 伝統的統計学で HDR を用いて信頼区間を求めると，$N=67$〜201。

⒝ 半整数補正した正規分布近似⑾で p を求めてNに変換すると，$N=69$〜182。

⒟ 修正HDR法でNのHDRを求めると，$N=67$〜206。

このデータに関しては正規分布近似よりも修正 HDR 法の方が精度が高い。これは p の値が 0.5 に近いため，N の上限下限ともに r の片側 $\alpha/2$ 点となっているからである。

考　　察

枠どり法については例１に見たように，実用上は正規分布近似で十分であるが，ベイズ統計手法を用いる場合には n の事前分布を一様分布と仮定するのがよい。Mangel and Beder（1985）はこれとフィッシャー情報量の平方根に比例する事前分布（ジェフリーズの基準の一種）を比較している。後者は前者よりも n の小さい方に事後分布がずれていて，不適切であった。

Petersen 法についてはベイズ的手法が数多く提唱されてきている。Gazey and Staley（1986）は超幾何分布の N の事前分布を一様分布と仮定した。しかしこの仮定は二項分布の p の事前分布を一様分布と仮定する方法と矛盾しており，例５のように区間推定が不能な場合もある。一方，Castledine（1981）は二項分布において n と p の同時事前分布を考え，p についてはベータ分布，n については一様分布または $1/n$ に従う（これは $\log(n)$ についての一様分布と同じ）モデルなどを検討した。繁桝（1985）によるとジェフリーズは「無知の状態を表す事前分布」として「$\Pr(\theta)\propto$ 定数」つまり θ についての一様分布，および「$\Pr(\theta)\propto 1/\theta$」つまり $\log(\theta)$ についての一様分布，以上の２つを提案している。これらの論文はこのジェフリーズの規準をほとんど無条件で採用しているわけである。

また Smith（1988）はポアソン分布において $1/n$ の事前分布をガンマ分布と仮定した。事前分布を一様分布に限定した古典的なベイズ統計学と異なり，事前分布を一般的なガンマ分布やベータ分布に拡張してそれらの分布の母数（これを超母数（hyper parameter）と呼ぶ）を検討するのが，最近のベイズ統計手法の傾向である。さらに Raftery（1988）は二項分布の n の事前分布をポアソン分布と仮定し，その事前分布において p は一様分布，n は $1/n$ に従うという「階層モデル」を検討した。これらはベイズ統計学における最近の流行をいち早く導入したモデルである。しかしいずれも伝統的統計学との比較検討をしておらず，実用性に疑問が残る。

さらに最新の MCMC（Markov chain Monte Carlo）法を Petersen 法に適用した例が Manly（1997）に紹介されている。U を無標識魚数，u を再捕された無標識魚数，s を再捕率とおいて，U は $u \sim U_0$ で一様分布，s は 0〜1 で一様分布するという同時事前分布を仮定している。母数が２つなので MCMC 法を具体的に説明するには適当なモデルであるが，Petersen 法のモデルとしては不適当である。なぜなら U と s は独立ではないからで，$N=M+U$，$n=r+u$，$s=n/N$ より，

$$s=\frac{r+u}{M+U} \tag{26}$$

が成立する。M，r，u は定数だから，U と s は独立ではなく１対１対応の関係にあって，(26)式は直交双曲線のグラフを意味している。Manly（1997）のモデルは M 尾から再捕率 s で r 尾を再捕したとき，U 尾から同じ再捕率 s で u 尾を再捕するというモデルなので，再捕率 s が同一であれば場所や時刻が異なっていても差し支えない。Petersen 法とは異なるモデルである。

前述のように Petersen 法については実用的には正規分布近似で十分である。ベイズ統計モデルを用いる場合には二項分布では p の事前分布を一様分布とする古典的なもの，超幾何分布では修正 HDR 法が無難である。ベイズ統計手法ではデータが追加されるごとに推定精度が向上すること，つまり事後分布の更新が魅力である。Petersen 法についてこれを検討してみよう。二項分布において p の事前分布を一様分布と仮定して１回目の事後分布を求め，それを２回目の事前分布と仮定して２回目の事後分布を求め，以下これを繰り返す。最初の事前分布は一様分布だから，事後分布はベータ分布となる。したがって

$$\mathrm{Ppost}(p)\propto p^{r1}(1-p)^{n1-r1} \tag{27}$$

である。これが２回目の事前分布となるので，2回目の事後分布は

$$\begin{aligned}\mathrm{Ppost}(p)&\propto p^{r1}(1-p)^{n1-r1}\cdot p^{r2}(1-p)^{n2-r2}\\&=p^{r1+r2}(1-p)^{n1+n2-r1-r2}\end{aligned} \tag{28}$$

となる。これを反復すると i 回目の事後分布は

$$\mathrm{Ppost}(p)\propto p^{\Sigma r}(1-p)^{\Sigma n-\Sigma r} \tag{29}$$

となる。この式は Petersen 法を１回だけ行ったとき，再捕した $\Sigma n=(n_1+\cdots+n_i)$ 尾のうち $\Sigma r=(r_1+\cdots+r_i)$ 尾が標識魚であった場合と同一である。したがって Σn と Σr の値を用いて正規分布近似(11)で計算すればよい。

二項分布は復元抽出モデルなので以上のような扱いが可能であるが，超幾何分布は非復元抽出モデルなので扱いが若干異なる。１回目に n_1 尾再捕したうちの r_1 尾に標識があり，２回目に n_2 尾再捕したうちの r_2 尾に標識があったとする。１回目の再捕魚を戻さない場合（非復元抽出）には一度に (n_1+n_2) 尾再捕したうちの (r_1+r_2) 尾に標識があった場合と同じとみ

なせる。つまり修正 HDR 法において $n=n_1+n_2$, $r=r_1+r_2$ とおくだけでよくて，⒀式を用いた事後分布の更新はかえって面倒である。１回目の再捕魚を戻した場合（復元抽出）には通常のベイズ統計手法と同様に⒀式による事後分布の更新を行うべきであるが，そのような非復元抽出と復元抽出を交互に行うような場合には，超幾何分布を用いるよりも二項分布による近似法を用いる方が無難だろう。

なお伝統的統計学においては HDR を用いることは稀で，通常は便宜的な片側 $\alpha/2$ 点を用いる。実用的にはそれでほとんど差し支えないからである。この論文では比較検討のためベイズ統計学においてもHDRで区間推定を行ったが，実用的には片側 $\alpha/2$ 点で十分である。その場合には⒃，⒅，㉒および㉕式によって，両者の値がほぼ一致することが保証される。そのような検討を行わずに，ベイズ統計学の論理だけで議論を展開することは慎むべきである。

ま と め

枠どり法と Petersen 法の区間推定において，伝統的統計学とベイズ統計学のいくつかの手法を数値例を用いて比較検討し，以下の結果を得た。

1. 区間推定は伝統的統計学における HDR を用いるのが最良である。しかし信頼区間が不連続になる場合もあり，表集計ソフトを用いても面倒な場合が多い。
2. 枠どり法および Petersen 法において区間推定を行うには，実用的には半整数補正した正規分布近似の式で十分である。
3. ベイズ統計手法を用いる場合には，枠どり法では n の事前分布を一様分布とする方法，Petersen 法では二項分布を用いる場合は p の事前分布を一様分布とする方法，超幾何分布を用いる場合には Akamine（1989b）の方法がよい。他のベイズ統計手法を用いる場合には，これらよりも精度の高い手法を採用するように努めるべきである。
4. p が０に近い部分では超幾何分布および二項分布はポアソン分布に近づき，棄却域が両側の $\alpha/2$ 点から上側 α 点に変化する。そのようなデータについてベイズ統計手法で精度よく推定することは現段階では困難に思われる。

謝 辞

著者がベイズ統計学の研究を行ったのは，東京大学海洋研究所の故松宮義晴教授の勧めと温かい激励のおかげである。したがってベイズ統計学とそれに関連する研究のすべては同教授に負っている。成蹊大学工学部経営工学科の岩崎学教授には二項確率に関する多くの貴重な文献をご教授いただいた。遠洋水産研究所の庄野宏研究員には統計学全般に関する最新の情報を，中央水産研究所の大原一郎室長にはこの論文に関するご助言をいただいた。また２名の匿名の査読者の方々にも同様に有益な情報とご助言をいただいた。以上の方々に深謝いたします。

文 献

赤池弘次，1989：事前分布の選択とその応用，「ベイズ統計学とその応用」（鈴木雪夫・国友直人編），東京大学出版会，東京，pp.81－98.

Akamine T., 1989a：An interval estimation for extraction using Bayesian statistics. *Bull. Japan Sea Natl. Fish. Res. Inst.*, **39**, 9－17.

Akamine T., 1989b, An interval estimation for the Petersen method using Bayesian statistics. *Bull. Japan Sea Natl. Fish. Res. Inst.*, **39**, 19－35.

Bayes T., 1763：An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. Reprinted in *Biometrika*, **45**, 293－315.

Castledine B. J., 1981：A Bayesian analysis of multiple-recapture sampling for a closed population. *Biometrika*, **68**, 197－210.

Gazey W. J. and Staley M. J., 1986：Population estimation from mark-recapture experiment using a sequential Bayes algorithm. *Ecology*, **67**, 941－951.

Hilborn R. and Mangel M., 1997：The ecological detective, Princeton Univ. Press, Princeton, 315pp.

岩崎学，2000：統計的データ解析のレシピ，日本評論社，東京，252pp.

小寺平治, 1995：大学入試数学のルーツ，現代数学社，京都，146pp.

Manly B. F. J., 1997：Randomization, bootstrap and Monte Carlo methods in biology, 2nd ed., Chapman & Hall, London, 399pp.

Mangel M. and Beder J. H., 1985：Search and stock depletion：theory and application. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, **42**, 150－163.

松原望，2000：必要とされるときの統計学，「実践としての統計学」（佐伯胖・松原望編），東京大学出版会，東京，pp.13－66.

蓑谷千凰彦，1997：推測統計のはなし，東京図書，東京，309pp.

Raftery A. E., 1988：Inference for the binomial N parameter：A hierarchical Bayes approach. *Biometrika*, **75**, 223－228.

Seber G. A. F., 1992：A review of estimating animal abundance Ⅱ. *International Statistical Review*, **60**, 129－166.

繁桝算男，1985：ベイズ統計入門，東京大学出版会，東京，227pp.

Smith P. J., 1988：Bayesian methods for multiple capture-recapture surveys. *Biometrics*, **44**, 1177－1189.

鈴木雪夫，1987：統計学，朝倉書店，東京，249pp.

竹内啓，1989：非ベイズの立場から見たベイズ統計学,「ベイズ統計学とその応用」（鈴木雪夫・国友直人編），東京大学出版会，東京，pp.119－136.

竹内啓，藤野和建，1981：２項分布とポアソン分布，東京大学出版会，東京，263pp.

渡部洋，1999：ベイズ統計学入門，福村出版，東京，249pp.

付　　録

二項分布と超幾何分布における関係式の証明を簡潔に示す。最初に二項分布について解説する。基本となるのは n についての漸化式：

$$\mathrm{Bi}(r,\ n,\ p)=p\,\mathrm{Bi}(r-1,\ n-1,\ p)+(1-p)\mathrm{Bi}(r,\ n-1,\ p) \tag{A 1}$$

である。これより，

$$\sum_{i=r}^{n}\mathrm{Bi}(i,\ n,\ p)=p\,\mathrm{Bi}(r-1,\ n-1,\ p)+\sum_{i=r}^{n-1}\mathrm{Bi}(i,\ n-1,\ p) \tag{A 2}$$

を得る。これを反復すると，

$$\sum_{i=r}^{n}\mathrm{Bi}(i,\ n,\ p)=p\sum_{j=r}^{n}\mathrm{Bi}(r-1,\ j-1,\ p) \tag{A 3}$$

を得る。ここで $n\rightarrow\infty$ とすると，左辺は１に近づくから，

$$\sum_{n=r}^{\infty}\mathrm{Bi}(r,\ n,\ p)=\frac{1}{p} \tag{A 4}$$

となる。ただし（A４）式の証明は（A３）式から導くよりも，直接に証明した方が簡単である。一方，部分積分を行うと，

$$\int_0^1\mathrm{Bi}(r,\ n,\ p)\mathrm{d}p=\frac{1}{n+1} \tag{A 5}$$

および，

$$(n+1)\int_0^p\mathrm{Bi}(r,n,t)\mathrm{d}t=\sum_{i=r}^{n}\mathrm{Bi}(i+1,\ n+1,\ p)=p\,\mathrm{Bi}(r,\ n,\ p)+\sum_{i=r+1}^{n}\mathrm{Bi}(i,\ n,\ p) \tag{A 6}$$

を得る。後半で（A２）式を用いた。

次に超幾何分布の関係式を解説する。二項分布の場合と同様に基本となるのは n についての漸化式：

$$\mathrm{HG}(r,\ n,\ M,\ N)=\frac{M-r+1}{N-n+1}\mathrm{HG}(r-1,\ n-1,\ M,\ N)+\frac{N-M-n+r+1}{N-n+1}\mathrm{HG}(r,\ n-1,\ M,\ N) \tag{A 7}$$

である。これより，

$$\sum_{i=r}^{n}\mathrm{HG}(i,\ n,\ M,\ N)=\frac{M}{N}\mathrm{HG}(r-1,\ n-1,\ M-1,\ N-1)+\sum_{i=r}^{n-1}\mathrm{HG}(i,\ n-1,\ M,\ N) \tag{A 8}$$

を得る。これを反復すると，

$$\sum_{i=r}^{n}\mathrm{HG}(i,\ n,\ M,\ N)=\frac{M}{N}\sum_{j=r}^{n}\mathrm{HG}(r-1,\ j-1,\ M-1,\ N-1) \tag{A 9}$$

を得る。ここで $n=N-M+r$ とすると，左辺は1となる。なぜなら i の上限は n で下限は $M+n-N=M+(N-M+r)-N=r$ となるからである。したがって，

$$\sum_{n=r}^{N-M+r}\mathrm{HG}(r,\ n,\ M,\ N)=\frac{N+1}{M+1} \tag{A10}$$

を得る。ところで超幾何分布では M と n を交換できるので，上式より，

$$\sum_{M=r}^{N-n+r}\frac{n+1}{N+1}\mathrm{HG}(r,\ n,\ M,\ N)=1 \tag{A11}$$

を得る。（A 9）式においても M と n を交換すると，

$$\begin{aligned}\sum_{k=r}^{M}\frac{n+1}{N+1}\mathrm{HG}(r,\ n,\ k,\ N)&=\sum_{i=r}^{n}\mathrm{HG}(i+1,\ n+1,\ M+1,\ N+1)\\&=\frac{M+1}{N+1}\mathrm{HG}(r,\ n,\ M,\ N)+\sum_{i=r+1}^{n}\mathrm{HG}(i,\ n,\ M+1,\ N+1)\end{aligned} \tag{A12}$$

を得る。後半で（A 8）式を用いた。

ところで「部分和分」公式は以下の２通りある。

$$\sum_{a}^{b}f(t)g(t)=\left[\Delta^{-1}f(t)g(t-1)\right]_{a}^{b+1}-\sum_{a}^{b}\Delta^{-1}f(t)\Delta g(t-1) \tag{A13}$$

$$\sum_{a}^{b}f(t)g(t)=\left[\Delta^{-1}f(t)g(t)\right]_{a}^{b+1}-\sum_{a}^{b}\Delta^{-1}f(t+1)\Delta g(t) \tag{A14}$$

ここで Δ は差分「$\Delta f(t)=f(t+1)-f(t)$」を意味し，Δ^{-1} はその逆演算である和分を意味している。（A13）式を用いると，

$$\sum_{N=M+n-r}^{\infty}\frac{(n+1)(M+1)}{(N+2)(N+1)}\mathrm{HG}(r,\ n,\ M,\ N)=1 \tag{A15}$$

を得る（Akamine, 1989b）。同様に（A14）式を用いると，

$$\begin{aligned}\sum_{h=N}^{\infty}\frac{(n+1)(M+1)}{(h+2)(h+1)}\mathrm{HG}(r,\ n,\ M,\ h)&=\frac{M+1}{N+1}\sum_{j=r}^{n}\mathrm{HG}(r,\ j,\ M,\ N)\\&=\sum_{k=r}^{M}\frac{n+1}{N+1}\mathrm{HG}(r,\ n,\ k,\ N)\end{aligned} \tag{A16}$$

を得る。後半で M と n の交換を行った。なお（A16）式で $N=M+n-r$ とおくと，（A15）式が得られる。